

# Modelování dynamiky finančních trhů pomocí systému stochastických diferenciálních rovnic

Tomáš Sobotka\*

2. února 2014

## Abstrakt

*Za poslední desetiletí se modely stochastické volatility staly standardním nástrojem k oceňování finančních derivátů a aktiv. Cílem práce je seznámit čtenáře s použitím těchto přístupů, které z matematického hlediska vycházejí ze stochastické analýzy a Itôova počtu. Modelování dynamiky trhů bude ilustrováno příkladem na britský index FTSE 100 a kontrakty evropských opcí.*

## Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Zavedení potřebných pojmů aneb rychlokurz stochastické analýzy</b>	<b>3</b>
2.1 Základní definice . . . . .	4
2.2 Stochastický integrál a diferenciální rovnice . . . . .	5
<b>3 Oceňování opcí aneb rychlokurz finanční teorie oceňování</b>	<b>8</b>
<b>4 Přehled modelů stochastické dynamiky</b>	<b>9</b>
<b>5 Proces kalibrace a výsledky na reálných datech</b>	<b>11</b>
5.1 Optimalizační úloha . . . . .	12
5.2 Výsledky kalibrace na FTSE 100 call opce . . . . .	12

## 1 Úvod

Již od počátků burzovního obchodování se mnozí pokouší odhadnout skutečnou dynamiku těchto trhů. Pro tento účel se používají metody technické analýzy, které využívají statistické nástroje k analýze dostupných dat a následné tvorbě předpovědi budoucího

---

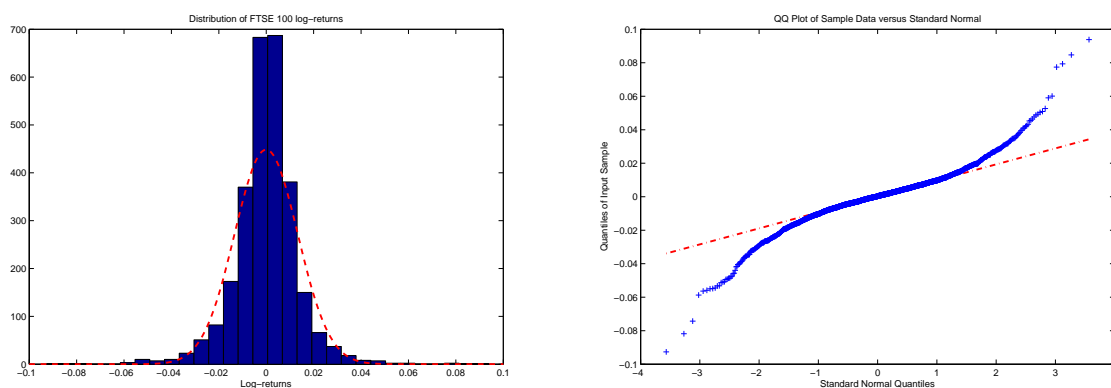
\*sobotkat@kma.zcu.cz

vývoje. U efektivních trhů je problém odhadu velmi obtížný a výsledky jsou často nepoužitelné (důsledek Hypotézy efektivních trhů [EMH], viz [8]).

V této práci zvolíme jiný pohled na dynamiku finančních trhů. Budeme apriori předpokládat, že tržní ceny se vyvíjí podle námi zvoleného náhodného procesu. Z tohoto přístupu nebudeme schopni zjistit budoucí hodnotu aktiva (= náhodná veličina), ale dokážeme odhadnout parametry stochastického procesu, který následně lze použít k oceňování derivátů.

První, kdo zkoumal trhy a jejich náhodnost, byl francouzský matematik Louis Bachelier ve své PhD práci *Théorie de la spéculation*. Bachelier se snažil vysvětlit fluktuace cen pomocí tzv. náhodné procházky (tj. něco jako upravené hody férovou kostkou) a zavedl stochastický proces, který obdržel jako limitu náhodné procházky. Tento proces byl později zkoumán Albertem Einsteinem a Mariánem Smoluchowskim; v současnosti ho známe pod označením Wienerův proces (v Anglickém jazyce *Wiener process* nebo *Brownian motion*), viz Definice 2.7.

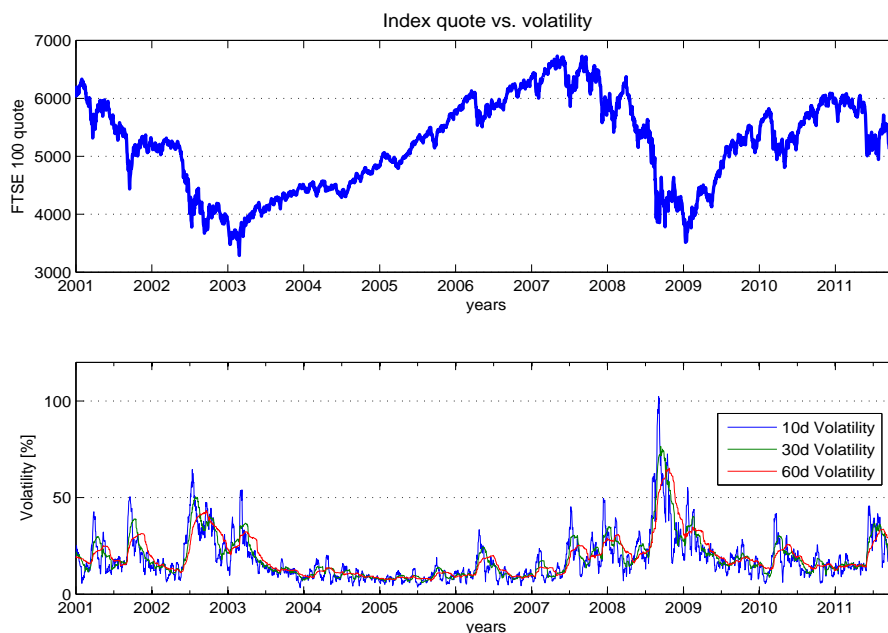
Bachelierovo přístupu byl zajímavý, ale stejně jako pozdější model od amerického ekonoma Paula A. Samuelsona postrádal praktické využití. První průlom v modelování finančních trhů nenastal dříve než v roce 1973, kdy Fisher Black a Myron Scholes vydali článek *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Později Robert C. Merton rozšířil zmiňovanou práci, což vedlo ke vzniku slavného Black-Scholesova modelu. Tento model znamenal průlom na trzích s deriváty - kontrakty na cenu budoucí poprvé lze ocenit jinak než umem a intuicí obchodníka.



**Obrázek 1:** Empirická distribuční funkce logaritmických výnosů versus normální rozdělení [index FTSE 100].

Model se stal enormně oblíbeným (dodnes se v některých případech používá), ale již kolaps finančních trhů z roku 1987 ukázal, že tento přístup nedokáže napodobit některé pozorované vlastnosti trhů a tedy i modelem získaná cena nemusí být tak přesná,

jak se očekávalo. Největší problémy přístupu spočívaly ve velmi restriktivních předpokladech na dynamiku trhů - výnosy na trzích běžně nemají log-normální rozdělení, bezriziková úroková míra  $r$  není konstantní po celou dobu trvání kontraktu a, nejdůležitěji, volatilita výnosů se v čase mění (není konstantní). Black-Scholesův model navíc nedokáže napodobit tzv. pákový efekt ani shlukování volatility. Pro názornost ilustrujeme tyto vlastnosti finančních trhů na Obrázku 1 a 2.



**Obrázek 2:** Historické ceny indexu FTSE 100 a časové řady 10/30/60-denní volatility.

Na základě výše zmíněných nedostatků původního Black-Scholesova modelu, vznikly nové přístupy, které jednotně značíme jako modely stochastické volatility a které budou hlavním předmětem zkoumání této práce. Volatilita je zde modelována stochastickým procesem, obecně tedy nemusí nabývat konstantní hodnoty v čase.

## 2 Zavedení potřebných pojmů aneb rychlokurz stochastické analýzy

V této části definujeme značení a základní poznatky z teorie pravděpodobnosti, které budeme potřebovat v následujících kapitolách. Začneme tradičně definicí pravděpodobnostního prostoru a míry.

## 2.1 Základní definice

**Definice 2.1** (*Pravděpodobnostní prostor*). Nechť trojice  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  tvoří měřitelný prostor, skládající se z množiny  $\Omega$ ,  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{F}$  a míry  $\mathbb{P}$  definované na  $\mathcal{F}$  tak, že  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ . Pak se trojice  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  nazývá pravděpodobnostní prostor.

$\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  se skládá z jevů (*events*). Míra  $\mathbb{P}$  nám ke každému jevu z  $\mathcal{F}$  přiřadí hodnotu z intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ . Prvkům množiny  $\Omega$  říkáme elementární jevy ( $\omega$ , *sample points*). V případě konečné množiny  $\Omega$  si můžeme zvolit  $\mathcal{F}$  jako systém všech podmnožin  $\Omega$ , tj.  $2^\Omega$ .

Pokud platí vlastnost s výjimkou jevu pravděpodobnosti 0 (tj. až na množinu míry 0), řekneme, že tato vlastnost platí skoro vždy a značíme to zkratkou *a. s.* (*almost surely*). Pro účely finančního modelování si vystačíme s náhodnými veličinami a procesy, které nabývají pouze reálných hodnot.

**Definice 2.2** (*Reálná náhodná proměnná*). Uvažujme pravděpodobnostní prostor a měřitelný prostor  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  ( $\mathcal{B}$  je Borelovská  $\sigma$ -algebra). Měřitelné zobrazení  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme reálnou náhodnou proměnnou a značíme ji  $X(\omega)$ .

Běžně se v literatuře setkáváme s notací náhodné proměnné  $X$ , kde neznačíme závislost na elementárním jevu  $\omega$ .

**Definice 2.3** (*Střední hodnota náhodné proměnné*). Obecně lze střední hodnota spojitě náhodné proměnné  $X$  vyjádřit pomocí následujícího Lebesgueova integrálu:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P},$$

pokud daný integrál má smysl.

**Definice 2.4** (*Rozptyl náhodné proměnné*). Rozptyl náhodné veličiny je definován pomocí její střední hodnoty.

$$\text{Var}[X] = \int_{\Omega} |X - \mathbb{E}X|^2 d\mathbb{P} = \mathbb{E} |X - \mathbb{E}X|^2 = \mathbb{E}|X|^2 - |\mathbb{E}X|^2.$$

**Definice 2.5** (*Charakteristická funkce náhodné veličiny*). Charakteristickou funkci reálné náhodné proměnné  $X$  lze vyjádřit

$$\phi_X(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda X}],$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$  a  $i$  je komplexní jednotka.

**Definice 2.6** (*Reálný stochastický proces*). Mějme pravděpodobnostní prostor, měřitelný prostor  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  a uspořádanou množinu  $T$ . Kolekci  $\{X_t(\omega) : t \in T\}$  nazveme reálným stochastickým (náhodným) procesem.

V našem případě se budeme zabývat spojitými procesy, tj. omezíme se na  $T = \langle 0; \infty \rangle$  a  $t \in T$  bude značit čas. Stochastický proces je definován na neklesající množině  $\sigma$ -algeber  $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ , kterou nazveme filtrací procesu.

**Definice 2.7** (*Wienerův proces*). Proces  $W_t(\omega)$  definovaný na pravděpodobnostním prostoru a splňující následující podmínky

- (i)  $W_0 = 0$  a.s.,
  - (ii) pro pevné  $\omega \in \Omega$  má  $W_t$  spojitě trajektorie a.s.,
  - (iii) přírůstky  $W_t - W_s$  jsou nezávislé a  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0; \sigma(t-s))$  pro  $0 \leq s < t$ ,
- nazveme Wienerův proces.

Pokud není uvedeno jinak, chápeme Wienerův proces  $W_t$  v rámci své přirozené filtrace  $\mathcal{F}_t^W := \sigma\{W_s; s \leq t\}$ . Pro  $\sigma = 1$  obdržíme standardní Wienerův proces.

## 2.2 Stochastický integrál a diferenciální rovnice

V této části zavedeme Itôův stochastický integrál, difuzní stochastické (obyčejné) diferenciální rovnice a to opět v Itôově smyslu.

Důvod nutnosti zavedení stochastického integrálu, formálně zapsaného

$$\int_0^\tau X_t dW_t, \quad (1)$$

je prozaický. Wienerův proces  $W_t$  použitý v (1) má skoro jistě (a.s.) nediferencovatelné trajektorie a nabývá nekonečné variace pro libovolný neprázdný časový úsek. Klasickou definici pro Riemann–Stieltjesův integrál z výše uvedených důvodů nelze použít. Abychom byli schopni smysluplně definovat integrál, který navíc bude mít několik užitečných vlastností, je nutné integrand  $X_t$  v (1) chápat pouze jako  $\mathcal{F}_t$ -měřitelný proces (tj. nezávislý na budoucích hodnotách).

Nejprve budeme uvažovat jednoduchý, tzv. krokový proces (*step process*), nebo-li proces  $\{G_s : 0 \leq s \leq \tau\}$ :

$$G_s \equiv G_{t_k} \quad \text{pro } t_k \leq s < t_{k+1} \leq t_m$$

a pro vhodné dělení  $T$  intervalu  $\langle 0; \tau \rangle$ :  $\{0 = t_1; t_2; \dots; t_m = \tau\}$ . Pak bude platit

$$\int_0^\tau G_t dW_t = \sum_{k=1}^{m-1} G_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}). \quad (2)$$

Nyní můžeme rozšířit definici na širší třídu měřitelných procesů.

**Tvrzení 2.1** (Určitý Itôův integrál). Necht'  $X_t$  je progresivně měřitelný proces takový, že

$$\mathbb{E} \left( \int_0^\tau X_t^2 dt \right) < \infty,$$

pak následující limita konverguje v pravděpodobnosti

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{m-1} X_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \int_0^\tau X_t dW_t, \quad (3)$$

kde  $W_t$  je standardní Wienerův proces<sup>1</sup>.

Důkaz lze najít např. zde: [2]. Důležité je si uvědomit, že Itôův integrál(3) je náhodná veličina. Další důležité vlastnosti integrálu pouze zmíníme.

**Definice 2.8** (Vlastnosti Itôova integrálu).

(i) (Linearita integrálu), pro  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\tau (aX_t + bY_t) dW_t = a \int_0^\tau X_t dW_t + b \int_0^\tau Y_t dW_t; \quad (4)$$

(ii) (Nulová střední hodnota)

$$\mathbb{E} \left( \int_0^\tau X_t dW_t \right) = 0; \quad (5)$$

(iii) (Itôova isometrie)

$$\text{Var} \left( \int_0^\tau X_t dW_t \right) = \mathbb{E} \left( \int_0^\tau X_t dW_t \right)^2 = \mathbb{E} \left( \int_0^\tau X_t^2 dt \right); \quad (6)$$

Linearita integrálu je patrná z definice, nulová střední hodnota vyplývá z linearity a definice přírůstků Wienerova procesu. Poslední uvedenou vlastnost lze dokázat ze znalosti rozptylu Wienerova procesu a z linearity Itôova integrálu.

**Poznámka 2.1.** Pokud vezmeme jiný bod trajektorie procesu  $X_t$  v sumě (3), obdržíme zcela jiný výsledek. Nefungují nám tedy základní nástroje klasického integrálního počtu.

---

<sup>1</sup>Obečně lze definovat pro libovolné semi-martingalové procesy.

Pokud není uvedeno jinak, budeme chápat stochastické diferenciální rovnice (SDE) v Itôově smyslu. Základní tvar Itôovy rovnice vypadá následovně.

$$SDE : \begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \\ X_0, \end{cases} \quad (7)$$

kde  $dW_t$  značí stochastický diferenciál ze vztahu (3),  $X_0$  představuje počáteční podmínku (skalár nebo náhodná proměnná). Aby výraz (7) měl smysl, je třeba klást na funkce náhodného procesu  $X_t$  a času  $t$  následující podmínku.

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t \mu(X_s, s) ds \right) < \infty; \quad (8)$$

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t \sigma^2(X_s, s) ds \right) < \infty. \quad (9)$$

Řešení rovnice (7) lze formálně zapsat:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s. \quad (10)$$

Kromě Lebesgueova integrálu, který vypočteme pro pevné  $\omega$ , zde máme výše uvedený Itôův integrál, jež lze upravit dle definice integrálu nebo pomoci nástrojů Itôova počtu. Nejdůležitější z těchto nástrojů - Itôovo lemma uvedeme v následující definici.

**Věta 2.2 (Itôova formule).** *Předpokládejme, že proces  $X_t$  má diferenciál (7), kde funkce  $\mu$ ,  $\sigma$  splňují (8), respektive (9). Mějme spojitou funkci  $u : \mathbb{R} \times \langle 0; \tau \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , pro kterou existují parciální derivace  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial X_t}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial X_t^2}$  a jsou spojitě. Položme  $Y_t := u(X_t, t)$ , pak náhodný proces  $Y_t$  má stochastický diferenciál*

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial X_t^2} \sigma^2(X_t, t) dt \quad (11)$$

$$= \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X_t} \mu(X_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial X_t^2} \sigma^2(X_t, t) \right] dt + \frac{\partial u}{\partial X_t} \sigma(X_t, t) dW_t. \quad (12)$$

Vztahy (11)-(12) nazýváme Itôova formule (*Itô formula, Itô chain rule*). Důkaz předěšlé věty lze nalézt ve většině učebnic stochastické analýzy, např. v knize [10].

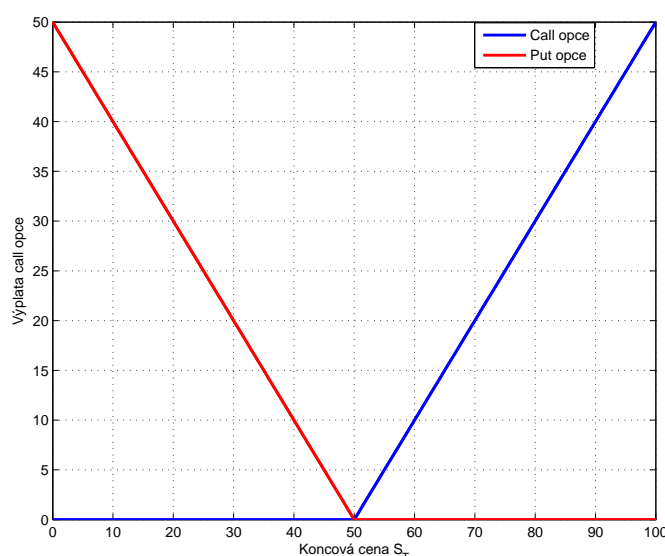
### 3 Oceňování opcí aneb rychlokurz finanční teorie oceňování

V této části se zaměříme na základní finanční deriváty, jejichž hodnota závisí na námi modelované dynamice podkladového trhu. Opět začneme zavedením potřebných definic.

Derivát je finanční nástroj, jehož cena závisí na ceně podkladového instrumentu. Jako instrument si můžeme představit akcie firmy, index, úrokovou sazbu, komodity, případně jiná na burzách obchodovaná aktiva. Obecně se jedná o kontrakty, které zavazují obě strany na předem stanoveném plnění. To bývá určeno (deterministickou) funkcí budoucí hodnoty aktiva (výplatní funkce).

Nejjednodušším derivátem s nelineární výplatní funkcí jsou tzv. evropské opce. Opce dále rozdělujeme na dva typy - call a put. Call opce je právo, nikoliv však povinnost, nakoupit jednotku podkladového aktiva za předem smlouvenou cenu (realizační cena, *strike price*) v určitém období. V případě evropského typu opce, termín možného nákupu je pevně stanoven na jeden konkrétní časový okamžik. Předpokládá se, že pokud to pro nás bude nevýhodné, nákup nerealizujeme (tj. nepoužijeme opci). Výplatní funkci call opce lze jednoduše zapsat.

$$f_{call} = \max(S_T - K; 0), \quad (13)$$



**Obrázek 3:** Výplatní funkce evropské call/put opce,  $K = 50$ .

kde  $T$  je čas expirace opce,  $S_T$  je cena podkladového aktiva při expiraci,  $K$  určuje smluvní cenu nákupu. Put opce je stejný kontrakt jako předchozí, jenom místo práva



na nákup se jedná o právo prodeje. Výplatní funkce vypadá pak následovně.

$$f_{put} = \max(K - S_T; 0). \quad (14)$$

Cena toho to produktu v čase  $t$  by měla odpovídat očekávané diskontované výplatě z opce. V případě call opce to lze formálně zapsat:

$$C_{call}(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(S_T - K; 0)], \quad (15)$$

respektive pro put opci:

$$C_{put}(t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\max(K - S_T; 0)], \quad (16)$$

kde  $0 \leq t \leq T$  a v případě  $t = T$  je cena určena deterministicky:  $C_{call}(T) = \max(S_T - K; 0)$ . Zároveň zde předpokládáme, že existuje jednoznačná bezriziková sazba  $r$ , která je konstantní v čase. Dále se budeme zabývat pouze cenou call opcí, obdobně lze postupovat i kontraktů typu put. Vztah (15) lze přepsat pomocí podmíněných pravděpodobností  $P_1, P_2$ :

$$C_{call}(t) = S_t P_1(S_t, T - t) - e^{-r\tau} K P_2(S_t, T - t). \quad (17)$$

První výraz představuje očekávanou hodnotu výplatní funkce za podmínky  $f > 0$ ,  $P_2$  značí pravděpodobnost, že dojde k využití opce, tj.  $P_2 = \mathbb{P}(S_T - K > 0)$ .

Pokud známe předpis pro charakteristickou funkci náhodné veličiny  $S_T$ , můžeme získat  $P_1, P_2$  pomocí zpětné Fourierovy transformace.

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\phi \ln(K)} F_j(\phi)}{i\phi} \right) d\phi, \quad (18)$$

kde  $j = 1, 2$  a  $F_j$  je charakteristická funkce logaritmické ceny  $\ln(S_T)$ . Pokud nejsme schopni vyjádřit  $F_j$  nebo numericky vyhodnotit integrál (18), simulujeme vývoj ceny podkladového aktiva až do času expirace  $T$ . Jako odhad (15) použijeme aritmetický průměr z námi simulovaných cen  $S_T$ .

## 4 Přehled modelů stochastické dynamiky

Zde představíme jednotlivé modely dynamiky ceny aktiva, napřed uvedeme společné vlastnosti, rozdílné charakteristiky zmíníme jednotlivě.

Veškeré uvažované modely mají společné následující předpoklady.

- (i) Nedochází k arbitrážím, a tedy i bezriziková sazba  $r$  je jednoznačně určena. Navíc  $r$  nabývá konstantní hodnoty po celou dobu trvání opčního kontraktu.
- (ii) Lze zakoupit libovolnou část podkladového aktiva.
- (iii) Obchodování probíhá spojitě v čase.
- (iv) Technika prodávání "na krátko" (short selling) je na zkoumaném trhu povolena.

**Obrázek 4:** Předpoklady modelů stochastické volatility. [12].

Vybrali jsme si tzv. modely stochastické volatility. Dynamika finančního aktiva bude modelována pomocí soustavy 2 stochastických diferenciálních rovnic. Obecně lze soustavu zapsat ve tvaru:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}, \quad (19)$$

$$dv_t = \alpha(S_t, v_t, t) dt + \sqrt{v_t} \beta(S_t, v_t, t) dW_t^{(2)}, \quad (20)$$

$$\mathbb{E} [dW_t^{(1)} dW_t^{(2)}] = \rho dt, \quad (21)$$

kde difuzní části rovnic (19) a (20) jsou řízeny standardními Wienerovými procesy  $W_t^{(1)}$ ,  $W_t^{(2)}$ , které jsou navzájem korelované dle vztahu (21). Obdobně jako v předešlé části, i zde  $r$  značí bezrizikovou úrokovou míru a  $S_t$  je nezáporný náhodný proces, který udává cenu aktiva v čase  $t$ .  $v_t$  je (opět nezáporný) náhodný proces určující rozptyl ceny  $S_t$ . Jednotlivé modely se budou lišit konkrétními volbami funkcí  $\alpha(S_t, v_t, t)$  a  $\beta(S_t, v_t, t)$  a tedy i různou implementací oceňovacího problému.

S prvním modelem stochastické volatility přišli Hull a White v roce 1987 [6]. Funkce v diferenciální rovnici (20) byly zvoleny  $\alpha(S_t, t, v_t) = C_1 v_t$ ,  $\beta(S_t, t, v_t) = C_2 \sqrt{v_t}$ . Dynamika trhu se modeluje následujícími rovnicemi.

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}, \quad (22)$$

$$dv_t = C_1 v_t dt + C_2 v_t dW_t^{(2)}, \quad (23)$$

Předpoklady na dynamiku procesu  $v_t$  jsou příliš restriktivní (log-normální rozdělení) a proto je velmi obtížné vysvětlit komplexní strukturu opčních cen (viz [11]). Naopak mezi kvalitní a často používané přístupy patří Hestonův model [5].

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}, \quad (24)$$

$$dv_t = -\kappa(v_t - \bar{v})dt + \eta \sqrt{v_t} dW_t^{(2)}. \quad (25)$$

Aplikaci Hestonova modelu si ukážeme na reálných datech v následující části. Dynamika rozptylu se řídí CIR procesem, který má deterministickou reverzi k hodnotě parametru  $\bar{v}$  s rychlostí  $\kappa$ . D. S. Bates vylepšil Hestonův model přidáním skokového procesu

$N_t$  do rovnice (24) [1].  $N_t$  se modeluje pomocí kompenzovaného složeného Poissonova procesu, viz [10].

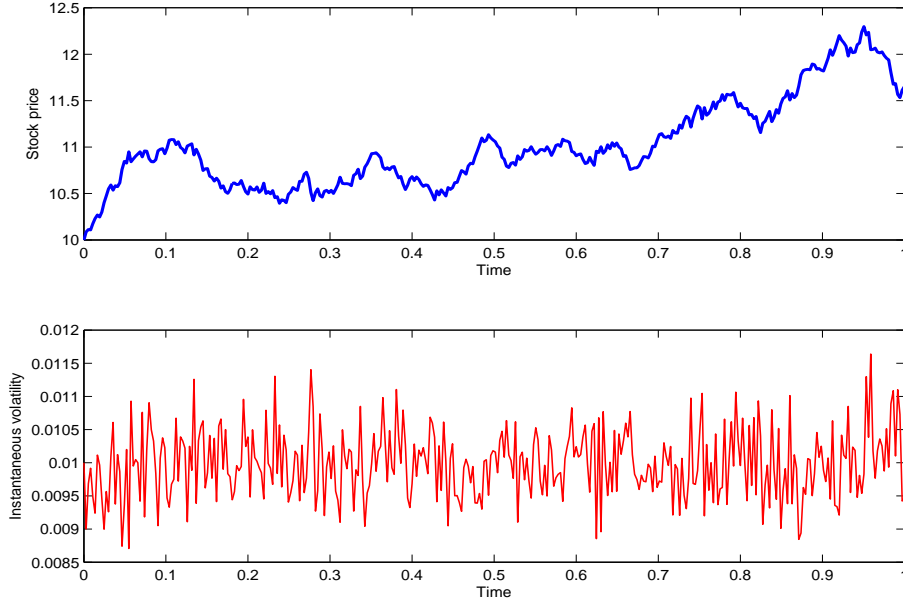
$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)} + Y_t S_{t-} dN_t, \quad (26)$$

$$dv_t = -\kappa(v_t - \bar{v})dt + \eta\sqrt{v_t}dW_t^{(2)}, \quad (27)$$

kde  $N_t$  má intenzitu skoků  $\lambda$  a  $Y_t S_{t-}$  značí amplitudu skoku v čase  $t$ . Batesův model si zachovává většinu matematických vlastností předchozího přístupu a v další části si ukážeme, zda dodatečné parametry pomůžou modelu k přesnějšímu ocenění evropských opcí. Posledním uvedeným přístupem je SABR model (Stochastic alpha, beta, rho model) [4].

$$dS_t = \sigma_t S_t^\beta dW_t^{(1)}, \quad (28)$$

$$d\sigma_t = \alpha\sigma_t dW_t^{(2)}. \quad (29)$$



**Obrázek 5:** Simulace Hestonova modelu s parametry:  $\mu = 0.05$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\bar{v} = 0.01$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $\rho = -0.9$ . Diskretizace  $1/365$  a počáteční podmínky:  $S_0 = 10$ ,  $v_0 = 0.01$ .

## 5 Proces kalibrace a výsledky na reálných datech

V této části si přiblížíme proces kalibrace a následně se seznámíme s obdrženými výsledky pro call opce na index FTSE 100.

## 5.1 Optimalizační úloha

Kalibraci na trh s  $N$  opcemi si představíme pomocí následující optimalizační úlohy.

$$G(\Theta) = \sum_{i=1}^N w_i |C_i(T_i, K_i) - C^{(m)}(S_t, v_t, r, T_i, K_i, \Theta)|^2;$$

$$\min_{\Theta \in \mathbb{R}^k} G(\Theta). \quad (30)$$

Jako optimalizační kritérium jsme zvolili vážený součet čtverců reziduí tržních a modelovaných cen. Změnou parametrů modelu  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$  se snažíme minimalizovat kritérium  $G(\Theta)$ .

$$\Theta^* = \arg \min_{\Theta \in \mathbb{R}^k} G(\Theta), \quad (31)$$

označíme zkalibrované parametry modelu. Úloha nelineárních nejmenších čtverců (30) není konvexní (viz [7]) a je zapotřebí zvolit vhodnou optimalizační proceduru.

V této práci použijeme globální optimalizační rutinu (genetický algoritmus) a následně se pokusíme vylepšit obdržené řešení metodou na hledání lokálního optima (trust-region-reflective `lsqnonlin` v prostředí Matlab). Při použití pouze lokální metody bychom narazili na problém citlivosti řešení (31) na počáteční odhad parametrů (viz např. [9]).

Váhy  $\{w_i\}_{i=1}^N$  definujeme pomocí funkce rozdílu mezi poptávanou a nabízenou cenou  $i$ -té opce.

$$w_i = \frac{1}{\sqrt{|C_i^{Ask} - C_i^{Bid}|}}. \quad (32)$$

K získání modelové ceny  $C^{(m)}(S_t, v_t, r, T_i, K_i, \Theta)$  ze vztahu (30) jsme využili znalosti charakteristických funkcí jak pro Hestonův, tak i Batesův model (např. [3]). Nejprve jsme z výrazu (18) spočetli  $P_1$ , respektive  $P_2$ . Pak jsme již obdrželi modelovou cenu ze (17).

## 5.2 Výsledky kalibrace na FTSE 100 call opce

Pro kalibraci jsme si nejprve vybrali 25 evropských call opcí na index FTSE 100 z 1. Srpna 2012. pomocí srovnávaných modelů jsme se pokusili vysvětlit střední cenu kontraktu (*Mid price*).

Kvalitu kalibrace zhodnotíme dle následujících kritérií.

$$AARE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{C_i - C_i^{(m)}}{C_i} \right|,$$

které představuje průměrnou absolutní hodnotu relativních chyb. Zajímá nás i maximální absolutní hodnota z relativních chyb, nebo-li:

$$MARE = \max_{1 \leq i \leq N} \left| \frac{C_i - C_i^{(m)}}{C_i} \right|.$$

Pro genetický algoritmus jsme obdrželi následující chyby:

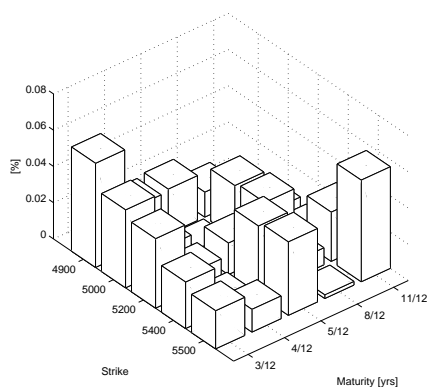
Kalibrace na call opce FTSE 100		
	Batesův model	Hestonův model
AARE	2,20%	2,30%
MARE	5,75%	6,58%

**Tabulka 1:** Výsledky globální optimalizace.

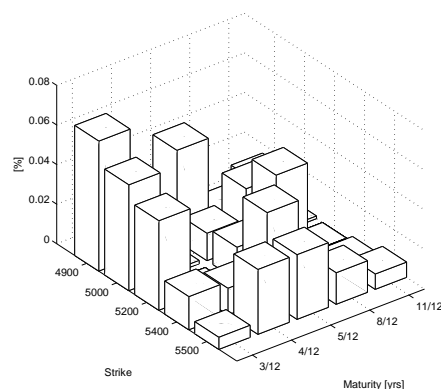
Metodou na hledání lokálního optima jsme dále vylepšili předešlé výsledky.

Kalibrace na call opce FTSE 100		
	Batesův model	Hestonův model
AARE	1,33%	2,13%
MARE	2,96%	6,57%

**Tabulka 2:** Lokální vylepšení `lsqnonlin`.

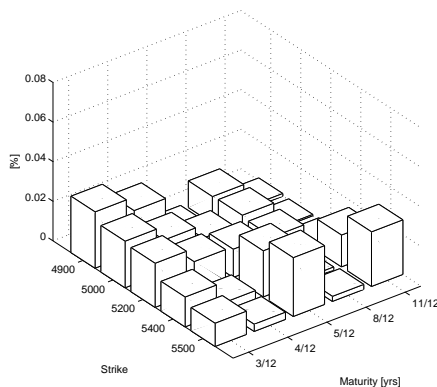


(a) Batesův model

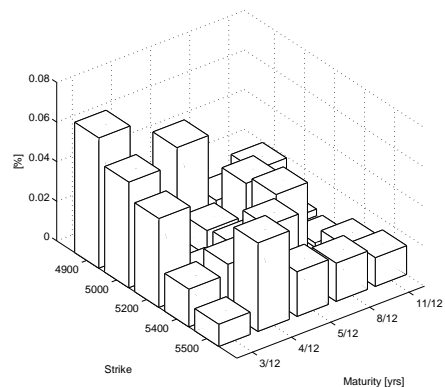


(b) Hestonův model

**Obrázek 6:** Absolutní hodnoty relativních chyb pro jednotlivé modely [genetický algoritmus].



(a) Batesův model



(b) Hestonův model

**Obrázek 7:** Absolutní hodnoty relativních chyb pro jednotlivé modely [Vylepšení pomocí `lsqnonlin`].

## Shrnutí výsledků

Batesův model se nám podařilo lépe zkalibrovat na trh call opcí pro index FTSE 100. Tento výsledek se zdá být přirozený vzhled k tomu, že Batesův model je skokově-difuzní verzí Hestonova modelu. Díky vlastnostem optimalizační úlohy (30) (resp. její špatné podmíněnosti), nemusí nutně model s více stupni volnosti lépe modelovat dynamiku trhu.

## Reference

- [1] D. S Bates, *Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options*, Review of Financial Studies **9** (1996), no. 1, 69–107.
- [2] A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2012.
- [3] J. Gatheral, *The volatility surface: A practitioner's guide*, Wiley Finance, John Wiley & Sons, 2006.
- [4] P. Hagan, D. Kumar, and A. S. Lesniewski, *Managing smile risk*, Wilmott magazine (2002), 84–108.
- [5] S. L. Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies **6** (1993), 327–343.
- [6] J. C. Hull and A. D. White, *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, Journal of Finance **42** (1987), no. 2, 281–300.

- [7] J. Kienitz and D. Wetterau, *Financial modelling: Theory, implementation and practice with matlab source*, The Wiley Finance Series, Wiley, 2012.
- [8] A.W. Lo and A.C. MacKinlay, *A non-random walk down wall street*, Princeton University Press, 2002.
- [9] M. Mrázek, *Hestonův model stochastické volatility*, Master's thesis, ZČU, 2013.
- [10] S. E. Shreve, *Stochastic calculus for finance. II*, Springer Finance, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [11] T. Sobotka, *Dynamic models of stock volatility*, Master's thesis, Brunel University, 2012.
- [12] P. Wilmott, *Paul Wilmott on quantitative finance*, John Wiley & Sons, 2007.